Лекция Производные обратной функции и композиции функций.

Производные обратных тригонометрических функций.

Формулы дифференцирования

При условии $u = \varphi(x)$	Номер формулы	При условии $u = x$	Номер формулы
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$, $\lvert u\rvert < 1$	(1)	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$	(1a)
$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$, $\lvert u\rvert < 1$	(2)	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert < 1$	(2a)
$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2}u'$	(3)	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	(3a)
$(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2}u'$	(4)	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	(4a)

Пример 1. а) $f(x) = 5\arcsin x + 2\arccos x$; вычислить $f'\left(\frac{1}{2}\right)$; б) $y = x(\arcsin x + \arccos x)$; в) $y = \arccos\sqrt{x-1}$; г) $y = \arcsin\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$.

○а) $f'(x) = 5\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$;

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{3\cdot 2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

б) $y' = 1\cdot(\arcsin x + \arccos x) + \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)x = \arcsin x + \arccos x.$

в) $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x-1})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x+1}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-1}} = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-1}}.$

г) $y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)^2}}\cdot\left(\frac{x^2-a^2}{x^2+a^2}\right)' =$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{(x^2+a^2)^2-(x^2-a^2)^2}{(x^2+a^2)^2}}}\cdot\frac{2x(x^2+a^2)-2x(x^2-a^2)}{(x^2+a^2)^2} =$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\sqrt{(x^2+a^2-x^2+a^2)(x^2+a^2+x^2-a^2)}}{x^2+a^2}}\cdot\frac{2x(x^2+a^2-x^2+a^2)}{(x^2+a^2)^2}=$$

$$=\frac{x^2+a^2}{\sqrt{2a^2\cdot 2x^2}}\cdot\frac{2x\cdot 2a^2}{(x^2+a^2)^2}=\frac{4a^2x}{2ax(x^2+a^2)}=\frac{2a}{x^2+a^2}.\ \bullet$$

Пример 2. а) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$; б) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

$\circ$ а) $y'=\dfrac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

б) $y'=-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2}\cdot\dfrac{1\cdot(1-x)+1\cdot(1+x)}{(1-x)^2}=$

$$=-\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2}\cdot\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}=-\frac{2}{1-2x+x^2+1+2x+x^2}=$$

$$=-\frac{2}{2+2x^2}=-\frac{2}{2(1+x^2)}=-\frac{1}{1+x^2}.\ \bullet$$

При изучении обратных функций нельзя ограничиваться только обратными тригонометрическими функциями.

Обратимся к определению производной обратной функции.

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки x_0, и пусть в этой точке существует производная $f'(x_0)\neq 0$. Тогда обратная функция в точке $y_0=f(x_0)$ имеет производную, которая может быть найдена по формуле $\left(f^{-1}(y_0)\right)'=\frac{1}{f'(x_0)}$.

Примеры.

Найти производные обратных функций $\left(f^{-1}(y)\right)'$.

1) $y=x+x^3$.

Решение.

$$\frac{dy}{dx}=1+3x^2\Rightarrow\frac{dx}{dy}=\frac{1}{1+3x^2}.$$

Ответ: $x'_y=\frac{1}{1+3x^2}$.

Следующий пример:

$y = x + \frac{1}{5}x^5.$

Решение.

$y' = 1 + x^4 \Rightarrow x' = \frac{1}{1+x^4}.$

Производная композиции функций.

В <u>математике</u> **композиция функций** (суперпози́ция фу́нкций) — это применение одной функции к результату другой (иначе можно назвать сложной функцией).

Разберем несколько примеров – примеры 6, 7

Пример 6. Найти производную сложной функции: а) $y = (x^3 - 2x^2 + 5)^3$; б) $y = \frac{1}{(1-x^3)^5}$; в) $f(x) = \sqrt{4+x^2}$; г) $s = (t^2+1)\sqrt{t^2-1}$.

○а) Полагая $u = x^3 - 2x^2 + 5$, имеем $y = u^3$. Согласно формуле (11) находим

$$y' = 3u^2u' = 3(x^3 - 2x^2 + 5)^3(x^3 - 2x^2 + 5)' = 3(x^3 - 2x + 5)^3(3x^2 - 4x).$$

Такая подробная запись производится только в процессе освоения техники дифференцирования. При навыке промежуточные вычисления производятся в уме.

б) I *способ*. Применим последовательно формулы (12) и (11):

$$y' = -\frac{1}{[(1-x^3)^5]^2}[(1-x^3)^5]' = -\frac{1}{(1-x^3)^{10}} \cdot 5(1-x^3)^4(1-x^3)' =$$

$$= -\frac{5}{(1-x^3)^6}(-3x^2) = \frac{15x^2}{(1-x^3)^6}.$$

II *способ*. Введем отрицательный показатель и применим формулу (11):

$$y = (1-x^3)^{-5};\ y' = -5(1-x^3)^{-5-1}(1-x^3)' = -5(1-x^3)^{-6}(-3x^2) = \frac{15x^2}{(1-x^3)^6}.$$

в) Полагая $u = 4 + x^2$, имеем $f(x) = \sqrt{u}$; согласно формуле (13) находим

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4+x^2}}(4+x^2)' = \frac{2x}{2\sqrt{4+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}.$$

г) Используя формулу производной произведения, получим

$$s' = (t^2+1)'\sqrt{t^2-1} + (\sqrt{t^2-1})'(t^2+1).$$

Найдем производные в каждом из слагаемых и выполним преобразования:

$$s' = 2t\sqrt{t^2-1} + \frac{1}{2\sqrt{t^2-1}} \cdot 2t(t^2+1) = 2t\sqrt{t^2-1} + \frac{t^3+t}{\sqrt{t^2-1}} =$$

$$= \frac{2t(t^2-1)+t^3+t}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{2t^3-2t+t^3+t}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{3t^3-t}{\sqrt{t^2-1}}. \bullet$$

Пример 7. Вычислить $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x-1}$.

○Заменим кубический корень дробным показателем и по формуле (11) найдем производную степени:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2+x-1} = (x^2+x-1)^{1/3}.$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^2+x-1)^{1/3-1}(2x+1) = \frac{1}{3}(x^2+x-1)^{-2/3}(2x+1) = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x-1)^2}};$$

$$f'(1) = \frac{2 \cdot 1+1}{3\sqrt[3]{(1^2+1-1)^2}} = \frac{3}{3\sqrt[3]{1}} = 1. \bullet$$

Задачи для самостоятельного решения, слева Вам предложены задания, справа ответы на данное задание. Вы можете проверить задания самостоятельно.

$y = \frac{(3x^2+5)^3}{2x-3}.$	$[\frac{(3x^2+5)^2(30x^2-54x-10)}{(2x-3)^2}]$
$y = \frac{2}{(x^3+5)^5}.$	$[-\frac{30x^2}{(x^3+5)^6}]$
$y = \sqrt[3]{6x^2-5}.$	$[\frac{4x}{\sqrt[3]{(6x^2-5)^2}}]$
$y = \sqrt[3]{(4+3x)^2}.$	$[\frac{2}{\sqrt[3]{4+3x}}]$
$y = \frac{5}{\sqrt{x^2+4}}.$	$[-\frac{5x}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}]$
$y = x - \mathrm{arctg}x.$	$[\frac{x^2}{1+x^2}]$

$$y = \operatorname{arctg}\frac{a}{x} + \ln\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}.$$

$$[\frac{2a^3}{x^4 - a^4}]$$

$$y = \arcsin\frac{x-2}{3}.$$

$$[\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}]$$

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://urait.ru/
2. http://mathprofi.ru/
3. http://mathportal.net/